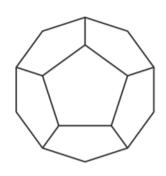
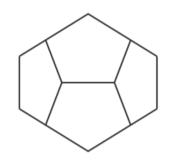
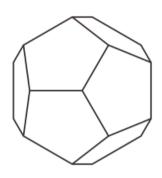
正十二面体の正多角形断面

中川宏

正十二面体の投影図としては次の3つがよく知られている。左から、面心図、辺心図,点 心図と呼ばれている。

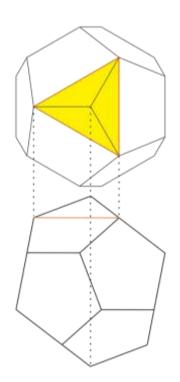






これらの投影図を元に、正十二面体の断面が正多角形になる場合を考えてみたい。

◆正三角形断面



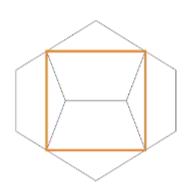
正十二面体の各頂点周りを最大の対角軸に直交する平面で 切断することによって正三角形の断面ができる。正十二面

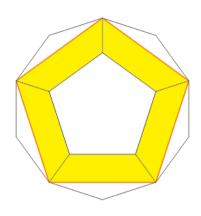
体の一辺の長さを1とするとき、断面の正三角形の一辺の最大は正五角形面の対角線の長

さ・黄金比 $_{ au}$ である。切断される正三角錐の最大体積は、 $\frac{ au}{12}$

◆正方形断面

一つの辺に最も近い4項点を含む平面で正十二面体を切断すると正方形断面ができる。その一辺の長さは対角線の長さ τ である。切断される屋根形の断片の体積は、 $\frac{2+3\tau}{12}$





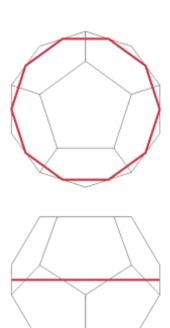
◆正五角形断面

正十二面体を正五角形面に平行な平面で切断すると、正五角形断面ができる。断面の正五角形の一辺の長さは1より大きく τ 以下である。切断される正五角錐台の最大体積は、正十二面体の体積の3分の1の、 $\frac{4+7\tau}{6}$

◆正十角形断面

同じく正五角形面に平行な平面で正十二面体を2等分する と正十角形断面ができる。

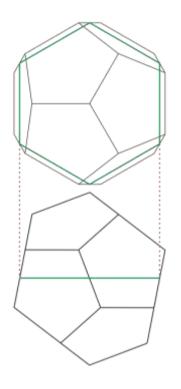
正十角形の一辺の長さは、 $\frac{\tau}{2}$



◆正六角形断面(大)

正十二面体の最長の対角軸に垂直な平面で2等分すると、 正六角形断面ができる。

正六角形の一辺の長さは、 $\frac{1+\tau}{2}$

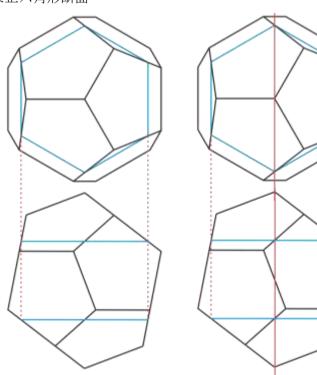


◆正六角形断面(小)

同じく正十二面体の最長の対角軸に垂直な平面で、 右図の位置で切断すると、少し小さな正六角形断面 ができる。

正六角形の一辺の長さは、 $\frac{1+3\tau}{5}$

この小さな正六角形の作図は、 これまでのように、投影図上の頂 点や辺の中点だけを使って描くこ とはできないが、右図のように赤 い実線を書き加えると、赤線と辺 が交わる点を元に描くことができ る。



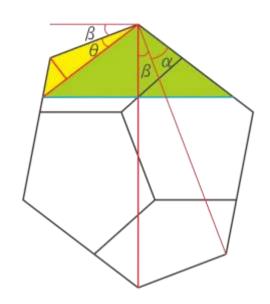
このときに正六角形断面(小)によって切り離される部分の体積を求める。

それは正六角錐の緑色の部分 V_6 と、三角錐の 黄色の部分 V_3 3つ分からなる。

正六角形の一辺の長さは、
$$\frac{1+3\tau}{5}$$

正六角錐の高さは、
$$\frac{\sqrt{3}}{5}(-1+2 au)$$

から、
$$V_6 = \frac{3(4+7\tau)}{50}$$



三角錐の高さは $\sin \theta$ だが、

$$\theta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + 2\beta)$$
、 $\tan \alpha = \frac{1}{\tau}$ $\tan \beta = \frac{1}{\tau^2}$ であるから、

三角関数の公式を駆使して、 $sin \theta = \frac{1}{3\sqrt{3- au}}$ とわかる。

これから、V3を計算して、

$$V_6$$
+ $3V_3$ = $\frac{29+52 au}{100}$ と求まる。

正十二面体の体積 $V_{12}=rac{4+7 au}{2}$ との比は、

$$\frac{9-\tau}{50}$$
 となった。