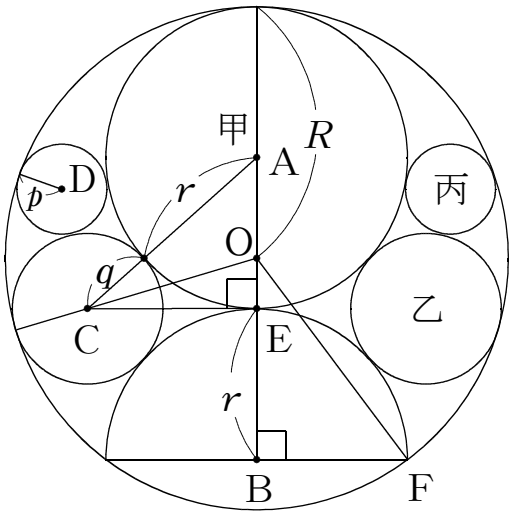
# 第11回「街角の問題」解答

永井信一

右の【図1】のように記号をつける。

団扇　中心→ O　半径→ $R$
甲円　上の中心→ A　半径→ $r$　　下の甲半円の中心→ B
乙円　左の中心→ C　半径→ $q$
丙円　左の中心→ D　半径→ $p$




【図1】

△ OBF において，三平方の定理より，

$$OF^2 = OB^2 + BF^2$$

$$R^2 = (3r - R)^2 + r^2$$

$$R = \frac{5}{3}r \qquad \cdots ①$$

△ ACE において，三平方の定理より，

$$CE^2 = AC^2 - AE^2 = (q + r)^2 - r^2$$

△ OCE において，三平方の定理より，

$$CE^2 = OC^2 - OE^2 = (R - q)^2 - (2r - R)^2$$

したがって，　$(q + r)^2 - r^2 = (R - q)^2 - (2r - R)^2$

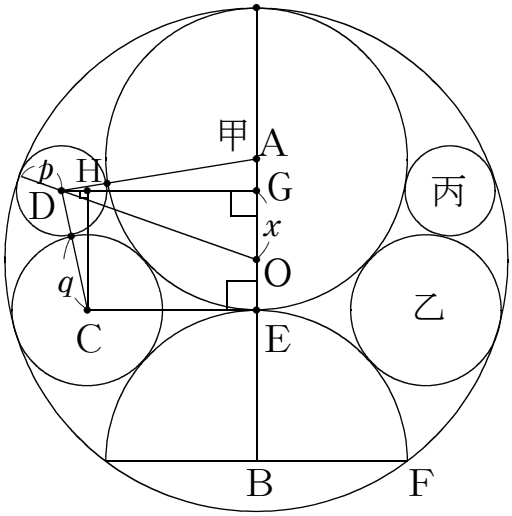
①を代入して，整理すると，　$\frac{8}{3}r(2q - r) = 0$　　$r \neq 0$　より，　$q = \frac{1}{2}r = \frac{3}{10}R$

よって，

$$CE = \frac{\sqrt{5}}{2}r = \frac{3\sqrt{5}}{10}R \qquad AO = AE - OE = r - (2r - R) = \frac{2}{5}R$$

右の【図2】のように C，D から垂線を引き，記号をつける。

$DG \perp AO$ ，$CH \perp DG$　　$GO = x$




【図2】

△ ADG において，三平方の定理より，

$$DG^2 = AD^2 - AG^2 = (p + r)^2 - \left(\frac{2}{5}R - x\right)^2$$

△ GDO において，三平方の定理より，

$$DG^2 = DO^2 - GO^2 = (R - p)^2 - x^2$$

したがって，

$$(p + r)^2 - \left(\frac{2}{5}R - x\right)^2 = (R - p)^2 - x^2$$

①を代入して，整理すると，　$R(x - R + 4p) = 0$

$R \neq 0$　より，$x = R - 4p$

よって，　$DG^2 = (R - p)^2 - (R - 4p)^2 = 6pR - 15p^2$

$$DH = DG - HG = DG - CE = \sqrt{6pR - 15p^2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}R$$

$$AG = AO - GO = \frac{2}{5}R - (R - 4p) = 4p - \frac{3}{5}R$$

$$CH = EG = AE - AG = r - \left(4p - \frac{3}{5}R\right) = \frac{6}{5}R - 4p$$

△ DCH において，三平方の定理より，

$$CH^2 + DH^2 = CD^2$$

$$\left(\frac{6}{5}R - 4p\right)^2 + \left(\sqrt{6pR - 15p^2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}R\right)^2 = \left(p + \frac{3}{10}R\right)^2$$

整理すると，　$9R^2 - 72pR + 124p^2 = 0$

これを解いて，　$R = \frac{12 \pm 2\sqrt{5}}{3}p$　　$R > q\left(= \frac{3}{10}R\right) > p$　より，　$R = \frac{12 + 2\sqrt{5}}{3}p$

答　　団扇の直径 $= \frac{12 + 2\sqrt{5}}{3} \times$ 丙円の直径