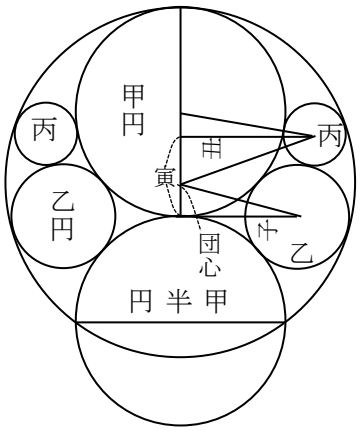
街角の数学第 11 回問題解答　　松本　登志雄



団扇径を団及び、子、丑、寅を右図のようにおけば、

方巾の定理より、

$$\left(団-\frac{3}{2}甲\right)\frac{3}{2}甲=\left(\frac{1}{2}甲\right)^2 \quad \cdots①$$

甲円と乙円の接触関係より、

$$\left(\frac{1}{2}甲+\frac{1}{2}乙\right)^2=\left(\frac{1}{2}甲\right)^2+子^2 \quad \cdots②$$

また、団円と乙円の接触関係より、

$$\left(\frac{1}{2}団-\frac{1}{2}乙\right)^2=\left(甲-\frac{1}{2}団\right)^2+子^2 \quad \cdots③$$

甲円と丙円の接触関係より、

$$\left(\frac{1}{2}甲+\frac{1}{2}丙\right)^2=\left(\frac{1}{2}甲-寅\right)^2+丑^2 \quad \cdots④$$

また、団円と丙円の接触関係より、

$$\left(\frac{1}{2}団-\frac{1}{2}丙\right)^2=\left(寅-\left(甲-\frac{1}{2}団\right)\right)^2+丑^2 \quad \cdots⑤$$

さらに、丙円と乙円の接触関係より、

$$\left(\frac{1}{2}乙+\frac{1}{2}丙\right)^2=(丑-子)^2+寅^2 \quad \cdots⑥$$

①より、　$団=\frac{5}{3}甲$

②－③　より、$乙=\frac{1}{2}甲$　　②に代入して、$子=\frac{\sqrt{5}}{4}甲$

④－⑤　より、$寅=甲-2丙$　④に代入して、$丑=\frac{1}{2}\sqrt{10甲丙-15丙^2}$

よって、⑥ は　$\left(\frac{1}{4}甲+\frac{1}{2}丙\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{10甲丙-15丙^2}-\frac{\sqrt{5}}{4}甲\right)^2+(甲-2丙)^2$

これを甲について解けば、$甲=\frac{1}{5}(12+2\sqrt{5})丙$

したがって、団扇径は $\frac{1}{3}(12+2\sqrt{5})丙$