第 12 回「街角の問題」（問題 1）解答

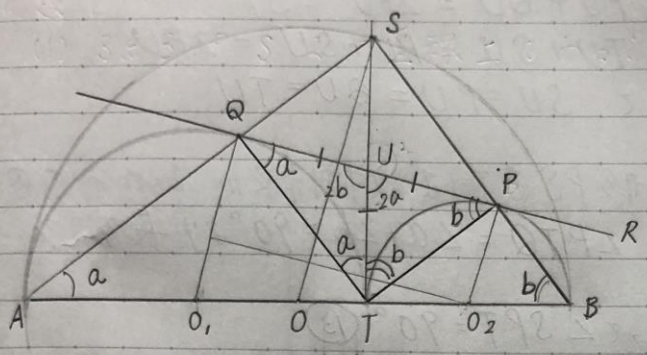
御代田知枝子

No.

Date 2020 3 16 (月)

360 落書き帳 860 外接する二円と共通外接線（その 12）

問題1 (1) 3点B, P, S は一直線上にあることを示して下さい



外接する二円の共通外接線の接点をP, Q, 円O_1の半径をr_1、円O_2の半径r_2とする

外接する二円の接点をT, 直線QPの延長上の点をR.

線分AB上のTからの垂線上の点をUとする.

円O_1において　$\angle AQT = 90°$（直径ATに対する円周角）　①

$\angle QAT = \angle PQT = \angle a$（接弦定理）　②

$\angle QTA = 90° - \angle a$ より $\angle QTU = \angle a$　③

②③より　$QU = TU$　④

円O_2において　同様にして

$\angle BPT = 90°$　⑤

$\angle PBT = \angle QPT = \angle b$　⑥

$\angle PTB = 90° - \angle b$ より $\angle PTU = \angle b$　⑦

⑥⑦より　$PU = TU$　⑧

④⑧より　線分AB上のTからの垂線上の点Uは $PU = QU = TU$ の条件を満している　⑨

また　$\angle PUT = \angle a + \angle a = 2\angle a$（外角）

$\angle PUT = 180° - 2\angle b$

よって　$2\angle a = 180° - 2\angle b$　　$2\angle a + 2\angle b = 180°$

$\angle a + \angle b = 90°$　⑩

$PQ^2 = (r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2 = 4r_1r_2$　　$PQ = 2\sqrt{r_1r_2}$　⑪

$ST^2 = SO^2 - TO^2 = \left(\frac{2r_1+2r_2}{2}\right)^2 - (r_1+r_2-2r_2)^2 = (r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2 = 4r_1r_2$

$ST = 2\sqrt{r_1r_2}$　⑫

⑪⑫より　$PQ = ST$

⑨より　$PQ = PU + QU = 2PU$

$ST = TU + SU = PU + SU = 2PU$

よって　$SU = PU = QU = TU$

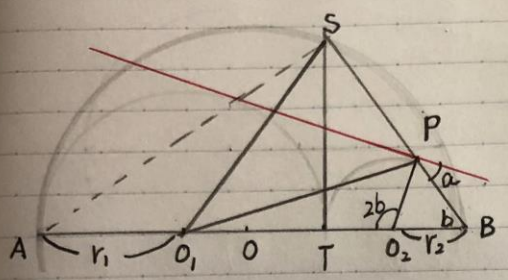
このことより　四角形PSQTは　対角線がおのおのの中点で交わり、$\angle PTQ = \angle a + \angle b = 90°$より長方形

よって$\angle SPT = 90°$ ⑬

⑤⑬より　$\angle BPT + \angle SPT = 90° + 90° = 180$

3点B, P, Sは一直線上にある.

(2) $O_1P = O_1S$ が成り立つことを示して下さい.



O_1Sについて

$O_1S^2 = O_1T^2 + TS^2$ より　　$O_1T = r_1$ ①

(1) より　　$\triangle AST \backsim \triangle SBT$ より　$AT : TS = ST : TB$

$2r_1 : TS = TS : 2r_2$

$TS^2 = 4r_1r_2$

$TS = 2\sqrt{r_1r_2}$

よって $O_1S^2 = r_1^2 + 4r_1r_2$　　$O_1S = \sqrt{r_1^2 + 4r_1r_2}$ ①

O_1Pについて　$\triangle O_1PO_2$ に余弦定理を用いて

$O_1P^2 = O_1O_2^2 + O_2P^2 - 2O_1O_2 \cdot O_2P \cos\angle O_1O_2P$

$= (r_1+r_2)^2 + r_2^2 - 2(r_1+r_2)\cdot r_2 \cos\angle O_1O_2P$ ……☆

※ $\cos\angle O_1O_2P = \cos 2\angle PBO_2$　　$\cos\angle PBO = \frac{TB}{SB} = \frac{2r_2}{SB}$

$= 2\cos^2\angle PBO - 1$

$SB^2 = TS^2 + TB^2$　　$\cos^2\angle PBO = \frac{4r_2^2}{4r_1r_2 + 4r_2^2}$

$= 4r_1r_2 + 4r_2^2$

$= \frac{r_2}{r_1+r_2}$

$\cos\angle O_1O_2P = \frac{2r_2}{r_1+r_2} - 1$

$= \frac{r_2 - r_1}{r_1+r_2}$ ☆☆

☆に☆☆を代入してまとめると

$O_1P^2 = (r_1+r_2)^2 + r_2^2 - 2\cancel{(r_1+r_2)} \times r_2 \times \frac{r_2-r_1}{\cancel{r_1+r_2}}$

$= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 + r_2^2 - 2r_2^2 + 2r_1r_2$

$= r_1^2 + 4r_1r_2$

$O_1P^2 = \sqrt{r_1^2 + 4r_1r_2}$ ②　　よって ①②より $O_1S = O_1P$