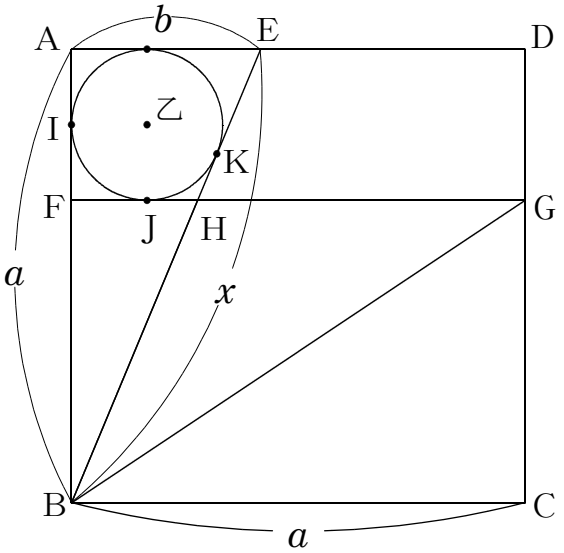
第8回　街角の問題　解答

永井信一

右の図のように，記号をつける。



FG は正方形の辺 BC に平行に引いた乙円の接線。

BK と BI は乙円に引いた接線の長さだから，

$$\mathrm{BK}=\mathrm{BI}=\mathrm{AB}-\mathrm{AI}=a-r_1 \qquad r_1 \text{ は乙円の半径}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BH}&=\mathrm{BK}-\mathrm{HK}\\&=a-r_1-\mathrm{HK}\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}\mathrm{HG}&=\mathrm{FG}-\mathrm{FJ}-\mathrm{HJ}\\&=a-r_1-\mathrm{HJ}\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{HK}=\mathrm{HJ}$　より，$\mathrm{BH}=\mathrm{HG}$

したがって，△ HBG は二等辺三角形である。

底角は等しいから，　∠ HBG=∠ HGB

FG // BC より錯角は等しいから，　∠ HGB ＝∠ GBC

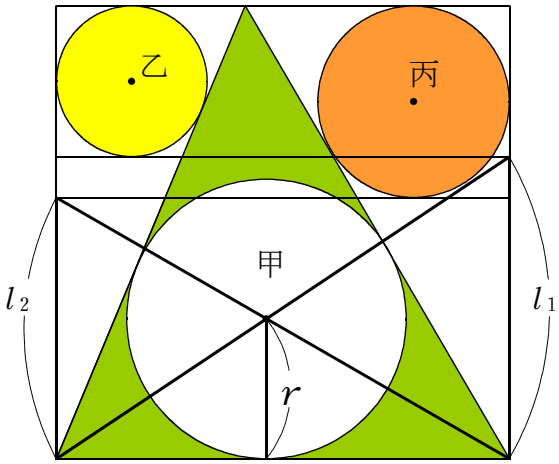
よって，∠ HBG ＝∠ GBC　　すなわち，BG は∠ HBC の二等分線になっている。

△ ABE で，直角三角形と内接円の半径の関係から，

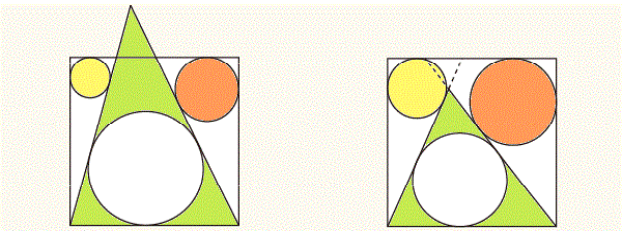
$$a+b-x=2r_1 \qquad \text{であるから，} \qquad a-2r_1=x-b=l_1$$

よって，　$\mathrm{GC}=a-2r_1=l_1$

丙円についても同様に考えると，角の二等分線の交点が甲円の中心となるので右の図のようになる。



相似な三角形の性質から，

$$r=\frac{l_1 \cdot l_2}{l_1+l_2} \qquad \text{または，} \qquad \frac{1}{r}=\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}$$

右の図では，２つの共通接線の交点が正方形の辺上にあるが，交点の位置はこれまでの計算で影響されないので，下の図のように交点が正方形の外部や内部になっても同様の関係が成り立つ。